

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ ИЗОТРОПНОМ СЛОЕ С ТОНКИМИ ПОКРЫТИЯМИ**

**В.М. Белубекян<sup>1</sup>, С.К. Оганян<sup>1</sup>, К.Б. Казарян<sup>1</sup>, В.В. Можаровский<sup>2</sup>, Н.А. Марьяна<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Институт механики НАН Армении, Ереван

<sup>2</sup>Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

<sup>3</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

**THE PROPAGATION OF SHEAR WAVES IN THE FLAT ISOTROPIC LAYER WITH THIN COATINGS**

**V.M. Belubekyan<sup>1</sup>, S.K. Ohanyan<sup>1</sup>, K.B. Ghazaryan<sup>1</sup>, V.V. Mozharovsky<sup>2</sup>, N.A. Maryina<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Institute of Mechanics of NAS of Armenia

<sup>2</sup>F. Scorina Gomel State University

<sup>3</sup>Belarusian State University of Transport, Gomel

Предлагается простая модель для исследования влияния свойств тонких покрытий на характеристики упругого волновода. Установлено, что выбором упругих свойств покрытий можно увеличить или уменьшить фазовые скорости сдвиговых волн.

**Ключевые слова:** упругий волновод, тонкое покрытие, фазовая скорость, сдвиговые волны.

A simple model to study the effect of properties of thin coatings on the characteristics of elastic waveguide is considered. It was established that the choice of the elastic properties of the coatings can increase or decrease the phase velocity of shear waves.

**Keywords:** elastic waveguide, thin coating, phase velocity, shear waves.

**Введение**

Многослойные структуры находят широкое применение в различных областях механики для решения многих инженерных задач, связанных с защитой от коррозии, теплоизоляционными свойствами, повышенными прочностными характеристиками, а также в ряде случаев слоистый композит является волноводной структурой. Имеется большое количество литературы, касающейся исследований вопросов распространения волн в слоистых телах. Так в работе [1] исследуется плоская волна в вязкоупругом слое среды, установлен характер изменения дисперсионной зависимости скорости волны от частоты. В статьях [2], [3] исследуется распространение волн в упругом изотропном слое в зависимости от граничных условий. Содержательный обзор по упругим волноводам приводится в статье В.В. Мелешко и др. [3].

В настоящей статье предлагается простая модель для исследования влияния свойства тонких покрытий на характеристики упругого волновода. Установлено, что выбором упругих свойств покрытий можно увеличить или уменьшить фазовые скорости сдвиговых волн.

**1 Постановка задачи**

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат  $(x, y, z)$  бесконечный трёхслойный волновод, который занимает область

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty, \\ -h_2 - 0,5h \leq y \leq 0,5h + h_1, \\ -\infty < z < \infty. \end{aligned}$$

Толщины верхних слоёв равны  $h_1, h_2$  соответственно (рисунок 1.1), считаем, что выполняется условие антиплоской деформации

$$\vec{u} = (0, 0, w(x, y, t)).$$

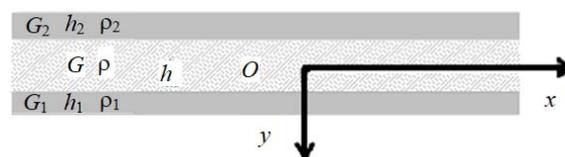


Рисунок 1.1 – Схема расчета

Уравнение распространения волн во внутреннем слое запишем в виде [4]

$$c_i^2 \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ для } -0,5h < y < 0,5h, \quad (1.1)$$

где  $c_i^2 = G/\rho$ ,  $G$  – модуль сдвига,  $\rho$  – плотность материала слоя,  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа.

Соответствующие уравнения для внешних слоёв удобно представить следующим образом:

$$G_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(i)}}{\partial y} = \rho_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2). \quad (1.2)$$

Здесь индекс  $i = 1$  относится к области  $0,5h < y \leq 0,5h + h_1$ , индекс  $i = 2$  – к области

$-h_2 - 0,5h \leq y < -0,5h$ ,  $\sigma_{23}^{(i)}$  – касательные напряжения,  $G_i$  – модули сдвига,  $\rho_i$  – плотности материалов.

Внешние границы волновода считаются свободными

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(2)} &= 0 \text{ при } y = -0,5h, \\ \sigma_{23}^{(1)} &= 0 \text{ при } y = 0,5h + h. \end{aligned} \quad (1.3)$$

На стыке слоёв принимаются условия непрерывности перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} w &= w_2, \sigma_{23} = \sigma_{23}^{(2)} \text{ при } y = -0,5h, \\ w &= w_1, \sigma_{23} = \sigma_{23}^{(1)} \text{ при } y = 0,5h. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Найдем решения уравнения (1.1) для слоя, у которых отлична от нуля была компонента  $w$  и не зависела от  $z$ , что дает возможность построить дисперсионное уравнение для поперечной волны.

### 2 Дисперсионное уравнение

Будем искать решения краевой задачи в форме таких решений, которые гармонически зависят от времени, т. е.  $w = f(y) \exp ik \left( x - \frac{\omega}{k} t \right)$ , здесь  $k$  – волновое число,  $i$  – мнимая единица,  $V = \frac{\omega}{k}$  – неизвестная фазовая скорость в упругом слое.

Уравнения (1.2) интегрируются по  $y$  в пределах  $(-h_2 - 0,5h; -0,5h)$ ,  $(0,5h; 0,5h + h_1)$  соответственно. Ввиду малости толщин  $h_1, h_2$  принимается, что перемещения  $w_1, w_2$  не меняются по толщине слоёв [5]. После чего используются граничные условия (1.3) и (1.4). В результате, уравнения (1.2) приводятся к следующим граничным условиям для уравнения (1.1)

$$\begin{aligned} G_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G \frac{\partial w}{\partial y} &= \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } y = -0,5h, \\ G_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - G \frac{\partial w}{\partial y} &= \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } y = 0,5h. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Таким образом, рассматриваемая задача волновода приводится к решению уравнения (1.1) с граничными условиями (2.1). Эта задача отличается от классических антиплоских задач плоского волновода [4] лишь усложнением граничных условий.

Общее решение уравнения (1.1) в виде гармонических волн известно

$$\begin{aligned} w &= \left[ A \sin(k\sqrt{\eta-1}y) + B \cos(k\sqrt{\eta-1}y) \right] \times \\ &\times \exp ik \left( x - \frac{\omega}{k} t \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\eta = \omega^2 / (k^2 C_i^2)$ ,  $C_i^2 = G/\rho$  – безразмерный параметр, характеризующий квадрат искомой фазовой скорости.

Требование, чтобы решение (2.2) удовлетворяло граничным условиям (2.1), приводит к следующей однородной системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $A, B$ .

$$\begin{aligned} &A \left[ \sqrt{\eta-1} + \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\eta-1}}{2} kh \right) \right] \gamma_1 (1 - \eta \theta_1) \xi_1 - \\ &- B \left[ \sqrt{\eta-1} \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\eta-1}}{2} kh \right) - \gamma_1 (1 - \eta \theta_1) \xi_1 \right] = 0, \\ &A \left[ \sqrt{\eta-1} + \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\eta-1}}{2} kh \right) \right] \gamma_2 (1 - \eta \theta_2) \xi_2 + \\ &+ B \left[ \sqrt{\eta-1} \operatorname{tg} \left( \frac{\sqrt{\eta-1}}{2} kh \right) - \gamma_2 (1 - \eta \theta_2) \xi_2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В (2.3) приняты обозначения

$$\theta_i = \frac{C_i^2}{C_{ii}^2}, C_{ii}^2 = \frac{G_i}{\rho_i}, \xi_i = kh_i, \gamma_i = \frac{G_i}{G} \quad (i=1,2). \quad (2.4)$$

Условие равенства нулю детерминанта системы (2.3) после ряда преобразований приводится к удобному виду

$$\begin{aligned} &[\xi_1 \xi_2 \gamma_1 \gamma_2 (\theta_1 \eta - 1)(\theta_2 \eta - 1) + 1 - \eta] \operatorname{tg}(\sqrt{\eta-1} kh) - \\ &- \sqrt{\eta-1} [(\theta_2 \eta - 1) \gamma_2 \xi_2 + (\theta_1 \eta - 1) \gamma_1 \xi_1] = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Дисперсионное уравнение задачи однослойного волновода со свободными от нагрузок границами получается из (2.5) либо при  $G_1 = G_2 = 0$ , либо при  $h_1 = h_2 = 0$ .

В частном случае слоя с одним покрытием [6] ( $h_2 = 0$ ) дисперсионное уравнение (2.5) упрощается

$$\sqrt{\eta-1} \operatorname{tg}(kh\sqrt{\eta-1}) + (\theta_1 \eta - 1) \gamma_1 \xi_1 = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) в длинноволновом приближении ( $kh \ll 1$ ) имеет решение

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{Gh + G_1 h_1}{\rho h + \rho_1 h_1}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что наличие покрытия приводит к увеличению фазовой скорости волны.

Уравнение (2.6) в коротковолновом приближении ( $kh \gg 1$ ) имеет решение, удовлетворяющее условию  $\eta < 1$ , если  $\theta_1 > 1$ . Это утверждение следует из уравнения (2.6) в приближении  $\operatorname{th}(\sqrt{1-\eta} kh) \approx 1$

$$\sqrt{1-\eta} - (\theta_1 \eta - 1) \gamma_1 \xi_1 = 0. \quad (2.8)$$

Дисперсионное уравнение (2.8) есть уравнение поверхностных волн Лява в случае, когда слой, покрывающий полупространство, тонкий. Из (2.8) при пренебрежении величиной сдвиговой жёсткости покрытия ( $G_1 h_1$ ) получается решение известной задачи о поверхностных волнах в полупространстве при наличии инерционной

массы на поверхности [6], [7]. Если же в (2.8) пре-небречь инерционной массой, то решение, удовлетворяющее условию  $\eta < 1$ , не существует.

### 3 Асимптотические зависимости и численные результаты

Исследуем дисперсионное уравнение (2.5), численно в программном модуле определим зависимость фазовой скорости волновода от параметров  $kh$ ,  $h_1$ ,  $\gamma_i$  и получим некоторые асимптотические формулы. Для плоских слоистых волноводов волноводный эффект возникает тогда, когда скорость волны в покрытиях меньше скорости волны в основном волноводе. Возникает вопрос: при каких условиях для покрытий с разными свойствами появляются волны с фазовыми скоростями, удовлетворяющими условию  $\eta < 1$ ? Уравнение (2.5) имеет частный корень  $\eta = 1$ . Если разделить это уравнение на  $\sqrt{\eta - 1}$  и потом взять предел  $\eta \rightarrow 1$ , то получится уравнение

$$\xi_1 \xi_2 \gamma_1 \gamma_2 (\theta_1 - 1)(\theta_2 - 1)kh - (\theta_2 - 1)\gamma_2 \xi_2 - (\theta_1 - 1)\gamma_1 \xi_1 = 0.$$

Преобразуем это уравнение к удобному для анализа виду

$$kh = [(\theta_1 - 1)\gamma_1 \xi_1]^{-1} + [(\theta_2 - 1)\gamma_2 \xi_2]^{-1} \quad (3.1)$$

Рассмотрим пример для слоистого волновода с заданными геометрическими и физическими параметрами  $h_2, h_1, \gamma_2, \gamma_1, G_2, G_1, \rho_2 = \rho_1$ . Введем соотношения  $\alpha_i = h_i/h$  ( $i = 1, 2$ ), тогда уравнение (3.1) можем записать в виде:

$$(kh)^2 = [(\theta_1 - 1)\gamma_1 \alpha_1]^{-1} + [(\theta_2 - 1)\gamma_2 \alpha_2]^{-1}, \quad (3.2)$$

с помощью которого легко определяем условие возникновения фазовых скоростей, удовлетворяющих условию  $\eta < 1$ . Например,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 1.4$ ,  $h_1 = 0.1$ ,  $h_2 = 0.2$ ,  $h = 1$ , то  $kh > 4,33$ . Исследуем поведение фазовой скорости для волновода при  $kh \rightarrow 0$ . Из уравнения (3.2) имеем

$$\eta = \frac{1 + \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2}{1 + \gamma_1 \alpha_1 \theta_1 + \gamma_2 \alpha_2 \theta_2}$$

или 
$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{Gh + G_1 h_1 + G_2 h_2}{\rho h + \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}. \quad (3.3)$$

На рисунке 3.1 представлены результаты решения дисперсионного уравнения (2.6) при различных значениях параметра  $kh$ .

Анализ кривых (1) и (2) показывает, что фазовая скорость практически не зависит от малых величин  $kh$  и из уравнений (3.3) можно найти эти величины, при которых появляются исследуемые волны. Например, для кривой (2) ( $kh > 3$ ). Предельное значение  $\eta$  в случае  $kh \rightarrow \infty$  определяется из уравнения

$$(\theta_1 \eta - 1)(\theta_2 \eta - 1) = 0. \quad (3.4)$$

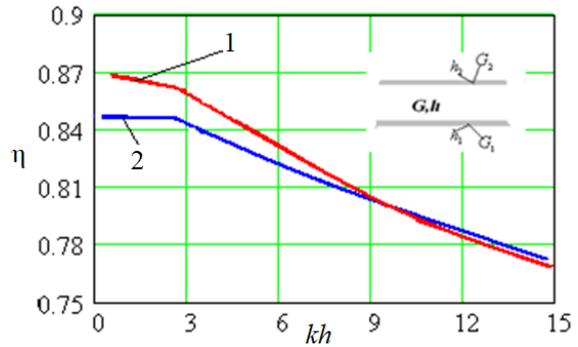


Рисунок 3.1. – Дисперсия фазовой скорости распространения волны:

- 1 – расчет для параметров  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 1.4$ ,  $h_1 = 0.1$ ,  $h_2 = 0.2$ ,  $h = 1$ ;
- 2 – расчет для параметров  $h_1 = h_2 = 0.2$ ,  $h = 1$ .

Из уравнения (3.4) находим предельное значение  $\eta$  для представленного на рисунке 3.1 примера. Имеем  $\eta = 0,714$ , что подтверждается численным решением дисперсионного уравнения. Если  $kh \rightarrow 0$ , то расчет по уравнению (3.3), которое преобразуется в уравнение, независимое от  $kh$  дает значение  $\eta = 0,869$ .

Пусть тонкие покрытия обладают одинаковыми свойствами:

$$h_2 = h_1, \gamma_2 = \gamma_1, G_2 = G_1, \rho_2 = \rho_1.$$

С учётом (2.4), (2.6) дисперсионное уравнение (2.5) приводится к виду

$$\left[ \xi_1^2 \gamma_1^2 (\theta_1 \eta - 1)^2 + 1 - \eta \right] \text{tg}(\sqrt{\eta - 1}kh) - 2\gamma_1 \xi_1 \sqrt{\eta - 1} (\theta_1 \eta - 1) = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) имеет решение  $\eta < 1$ , если  $\theta_1 > 1$ . Реализован программный модуль для численного решения дисперсионных уравнений. В частности, при  $\gamma_1 = 2$ ,  $\theta_1 = 1.4$ ,  $\xi_1 = 0.1$ ,  $kh = 1$  имеем  $\eta = 0.897$ . Уравнение (3.2) может быть условием возникновения фазовых скоростей, удовлетворяющих условию  $\eta < 1$ .

### Заключение

Разработана механико-математическая модель определения сдвиговых волн для слоистого волновода, проведено теоретическое исследование о влиянии свойств тонких покрытий на характеристики упругого волновода. Получены зависимости, определяющие фазовые скорости в изотропном слое с покрытиями с различными геометрическими и физическими характеристиками. Построены асимптотические формулы, определяющие зависимость фазовой скорости от частоты, т. е. дисперсию. Например, при задании остальных характеристик из (3.2) определяется  $(kh)_*$ . Следовательно, условием появления указанных

волн будет  $(kh) > (kh)_*$ . Расчеты проводились с помощью разработанного программного модуля. Результаты могут использоваться в производстве и в учебном процессе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кулик, В.М. Плоская волна деформации в изотропном слое вязкоупругого материала / В.М. Кулик // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47, № 3. – С. 104–111.

2. Распространение волн в упруго-закрепленном изотропном слое / Л.Ю. Коссович [и др.] // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия: Механика. – 2008. – № 8/2 (67). – С. 78–89.

3. Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко [и др.] // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 86–104.

4. Miklovitz, J. The theory of elastic wave and waveguides / J. Miklovitz. – Amsterdam: North-Holland, 1978. – 618 p.

5. Белубекян, М.В. О поверхностных волнах Лява в случае композиционного слоя / М.В. Белубекян // Актуальные проблемы неоднородной механики. – Ереван: ЕГУ, 1991. – С. 66–71.

6. Generalized love waves / M.I. Newton [et al.] // Europhysics Letters. – 2002. – Vol. 58, № 6. – P. 818–822.

7. Белубекян, В.М. Резонансные и локализованные сдвиговые колебания в слое с прямоугольным поперечным сечением / В.М. Белубекян, М.В. Белубекян // Докл. НАН Армении. – 2015. – Т. 115, № 1. – С. 40–43.

*Работа выполнена при поддержке БРФФИ – ГКН Армении, грант T17APM-034, AV16-42.*

*Поступила в редакцию 30.10.17.*